PART2　数学的帰納法による不等式の証明

2　［1］　n を２以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$$

［2］　n が自然数のとき，不等式 $n!\geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

Point Pickup

$n\geqq$● であるすべての自然数 n について不等式 $A>B$ ……… ① が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する方法は以下の通り

［1］　$n=$● のとき①が成り立つことを示す。

［2］　$n=k\,(k\geqq$●$)$ のとき①が成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときにも①が成り立つことを示す。

第 4 講　PART2　確認問題

1　n が自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$$

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$　すなわち

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} \geqq \frac{2n}{n+1} \quad \cdots\cdots(*)$$

について

[1]　$n=$ ［ア］ のとき

（(＊)の左辺）＝［イ］

（(＊)の右辺）＝［ウ］

よって，(＊)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k} \geqq \frac{2k}{k+1}$$

このとき

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$\geqq\left(\boxed{\text{エ}}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$=\frac{k}{\left(k+\boxed{\text{オ}}\right)\left(k+\boxed{\text{カ}}\right)}>\boxed{\text{キ}}$$

（ただし，［オ］＜［カ］とする）

ゆえに

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \geqq \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

よって，$n=$ ［ク］ のときにも（＊）は成り立つ。

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，（＊）すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$$

は成り立つ。

［［エ］ の選択肢］

① $\dfrac{2k}{k+1}$　　② $\dfrac{2k+2}{k+2}$

③ $\dfrac{2n}{n+1}$　　④ $\dfrac{2n+2}{n+2}$

［［ク］ の選択肢］

① $n-1$　　② $n+1$

③ $k-1$　　④ k　　⑤ $k+1$

2 n を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$4^{n-2} \geqq n^2$$

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

$$4^{n-2} \geqq n^2 \cdots\cdots(*)$$

とする。

[1]　$n=$ **ケ** のとき

（（＊）の左辺）＝ **コサ**

（（＊）の右辺）＝ **シス**

よって，（＊）は成り立つ。

[2]　$n=k\left(k \geqq \text{ケ}\right)$ のとき，（＊）が成り立つと仮定すると

$$4^{k-2} \geqq k^2$$

このとき

$$4^{(k+1)-2}-(k+1)^2$$

$$= \text{セ} \cdot 4^{k-2}-(k+1)^2$$

$$\geqq \text{セ} \cdot \text{ソ} -(k+1)^2$$

$$= \left(\text{タ}\, k+1\right)\left(k- \text{チ}\right) > 0$$

ゆえに　$4^{(k+1)-2} \geqq (k+1)^2$

よって，$n=k+1$ のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2] より，4 以上のすべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

[**ソ** の選択肢]

① $(k-1)^2$　　② k^2

③ $(n-1)^2$　　④ n^2

PART2　数学的帰納法による不等式の証明

2　[1]　n を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$$

[2]　n が自然数のとき，不等式 $n!\geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

[1]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$　すなわち　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$ …… ① について

(I)　$n=2$ のとき　(①の左辺)$=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{4}$，(①の右辺)$=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

よって，$n=2$ のとき，①は成り立つ。

(II)　$n=k$ $(k\geqq 2)$のとき，①が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

このとき

$$\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$>\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k(k+1)-k}{k(k+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$

したがって　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

(I), (II)より，2 以上のすべての自然数 n について，①すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$ は成り立つ。

[2]　$n!\geqq 2^{n-1}$ …… ① とする。

(I)　$n=1$ のとき　(①の左辺)$=1!=1$，(①の右辺)$=2^0=1$ より，①は成り立つ。

(II)　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$k!\geqq 2^{k-1}$$

このとき

$$(k+1)!-2^{(k+1)-1}=(k+1)\cdot k!-2^k$$
$$\geqq (k+1)\cdot 2^{k-1}-2\cdot 2^{k-1}=(k-1)\cdot 2^{k-1}\geqq 0$$

したがって　$(k+1)!\geqq 2^{(k+1)-1}$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

(I)，(II)より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

第 4 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：1，ウ：1，エ：①，オ：1，
カ：2，キ：0，ク：⑤

[解説]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$　すなわち

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} \geqq \frac{2n}{n+1} \cdots\cdots(*)$$

について

[1]　$n=\mathbf{1}$ のとき **[A]**

$$((*)\text{の左辺})=\frac{1}{1}=\mathbf{1}$$

$$((*)\text{の右辺})=\frac{2\cdot1}{1+1}=\mathbf{1}$$

よって，$(*)$は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，$(*)$が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k} \geqq \frac{2k}{k+1}$$

このとき

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$\geqq\left(\frac{\mathbf{2k}}{\mathbf{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$=\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+2)-(k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{(k+\mathbf{1})(k+\mathbf{2})}>\mathbf{0}$$

ゆえに

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \geqq \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

よって，$n=\mathbf{k+1}$ のときにも$(*)$は成り立つ。

> [A]　数学的帰納法
> 自然数 n に関する命題 P がすべての自然数 n で成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明する方法は以下の通り。
> [1]　$n=1$ のとき命題 P が成り立つことを示す。
> [2]　$n=k$ のとき命題 P が成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，（＊）すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$$

は成り立つ。

2 **[正解]** ケ：4，コサ：16，シス：16，セ：4，ソ：②，タ：3，チ：1

[解説]

$$4^{n-2} \geqq n^2 \cdots\cdots (＊)$$

とする。

[1]　$n=4$ のとき [B]

$$((＊)の左辺) = 4^{4-2} = \mathbf{16}$$

$$((＊)の右辺) = 4^2 = \mathbf{16}$$

よって，（＊）は成り立つ。

[2]　$n=k\,(k \geqq 4)$ のとき，（＊）が成り立つと仮定すると

$$4^{k-2} \geqq k^2$$

このとき

$$\begin{aligned} &4^{(k+1)-2} - (k+1)^2 \\ &= \mathbf{4} \cdot 4^{k-2} - (k+1)^2 \\ &\geqq 4 \cdot \boldsymbol{k^2} - (k+1)^2 \\ &= 3k^2 - 2k - 1 \\ &= (3k+1)(k-\mathbf{1}) > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　$4^{(k+1)-2} \geqq (k+1)^2$

よって，$n=k+1$ のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2] より，4 以上のすべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

[B]　数学的帰納法（n が 2 以上の場合）
[1]　$n=$ ●のとき命題 P が成り立つことを示す。
[2]　$n=k$（$k \geqq$ ●）のとき命題 P が成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。